23.06.05

1. Periodische Signale

a) (Endliche) Fourier-reihe

b) Beispiel

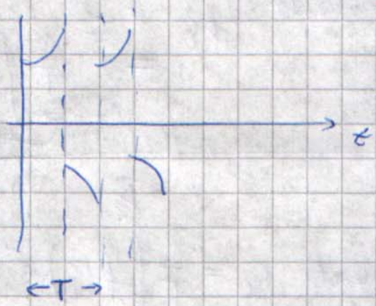
Zeitbereich		Frequenzbereich
Period. Signale	$\Longleftrightarrow$	Linienspektrum

c) Symmetrieeigenschaften v. Fourierreihen

gerade Funktion: $f(-t)=f(t)$ $\Rightarrow$ reine Kosinusreihe ($b_l = 0$)

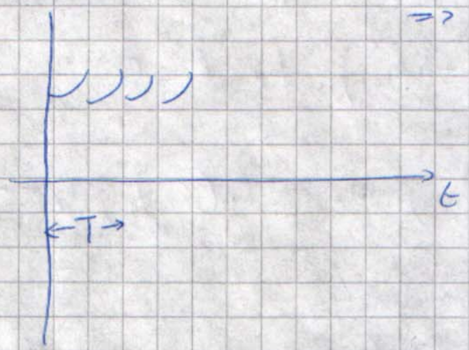
Halbwellensymmetrie („ungerade") $f(t) = -f(t+\frac{T}{2})$

$\Rightarrow a_{2l} = b_{2l} = 0$



Halbwellensymmetrie („gerade") $f(t) = f(t+\frac{T}{2})$

$\Rightarrow a_{2l+1} = b_{2l+1} = 0$



d) Fourierreihe in komplexer Schreibweise

$$f(t) = \underbrace{\frac{1}{T}\int f(\xi)\,d\xi}_{a_0} + \sum_{l=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2}{T}\int f(\xi)\cos(l\omega_0 t)\,d\xi}_{a_l}\cos(l\omega_0 t)$$
$$+ \sum_{l=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2}{T}\int f(\xi)\sin(l\omega_0 t)\,d\xi}_{b_l}\sin(l\omega_0 t)$$

$$= \frac{1}{T}\int f(\xi)\,d\xi + \frac{2}{T}\sum_{l=1}^{\infty}\int f(\xi)\underbrace{\cos[l\omega_0(t-\xi)]}_{\frac{1}{2}\left[e^{il\omega_0(t-\xi)} + e^{-il\omega_0(t-\xi)}\right]}\,d\xi$$

$\boxed{\text{wegen } \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a \sin b}$

$$= \frac{1}{T}\int f(\xi)\,d\xi + \frac{1}{T}\sum_{l=1}^{\infty}\int f(\xi)e^{il\omega_0(t-\xi)}\,d\xi + \underbrace{\frac{1}{T}\sum_{l=1}^{\infty}\int f(\xi)e^{-il\omega_0(t-\xi)}\,d\xi}_{\sum_{l=-1}^{-\infty}\int f(\xi)e^{il\omega_0(t-\xi)}\,d\xi}$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int f(\xi)e^{il\omega_0(t-\xi)}\,d\xi = \sum_{l=-\infty}^{+\infty}\underbrace{\frac{1}{T}\int f(\xi)e^{-il\omega_0\xi}\,d\xi}_{=:c_l}\cdot e^{il\omega_0 t}$$

$$\boxed{\Rightarrow f(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l\, e^{il\omega_0 t} \quad \text{mit} \quad c_l = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(\xi)\,e^{-il\omega_0\xi}\,d\xi}$$

$$c_0 = a_0\,;\quad c_l = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_l - ib_l) & \text{für } l>0 \\ \frac{1}{2}(a_{|l|} + ib_{|l|}) & \text{für } l<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_l = c_{-l}^{*}\,;\quad a_l = 2\,\mathrm{Re}(c_l)\,;\quad b_l = -2\,\mathrm{Im}(c_l)$$

e) Bemerkung zu Fourierreihen

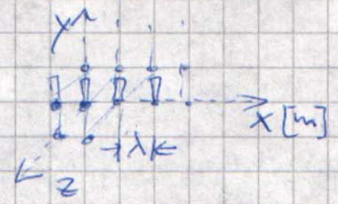
siehe „Albert"! (Programm zur Darstellung v. Fourierreihen)

Ortsbereich

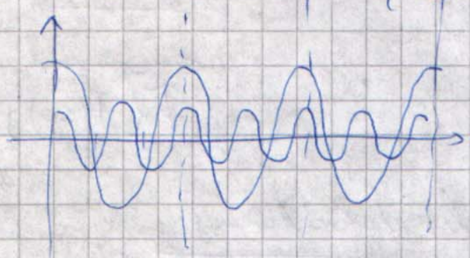
Ortsfrequenzbereich (Raumfrequenz) ($\vec{k}$-Raum)

period. Struktur im Raum z.B.

z.B. Kristall



$\Rightarrow$



$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \; [m^{-1}]$$

Linienspektrum

2. Nichtperiodische Signale

a) Übergang zum Fourierintegral

$$f(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l e^{il\omega_0 t}$$

$$\omega_l := l\omega_0 = l\frac{2\pi}{T}$$

$$\Rightarrow \omega_{l+1} - \omega_l = \frac{2\pi}{T} =: \Delta\omega$$

$$\rightarrow \frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$$

$$\rightarrow f(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{\Delta\omega}{2\pi} \int f(\xi) e^{-i\omega_l \xi} d\xi}_{c_l} \, e^{i\omega_l t}$$

T sehr groß (Periodizität wird verlassen) $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \Delta\omega \rightarrow d\omega \\ \omega_l \rightarrow \omega \\ \sum \rightarrow \int \end{array}\right\} \Rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi}_{=: A(\omega)} \, e^{i\omega t} d\omega$

$$\boxed{\Rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \text{mit } A(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt}$$

nichtperiodisches Signal $\Longleftrightarrow$ kontinuierliches Spektrum

Zeitbereich | Frequenzbereich

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}\{f(t)\}} A(\omega)$$

$$f(t) \xleftarrow[\mathcal{F}^{-1}\{A(\omega)\}]{} A(\omega)$$

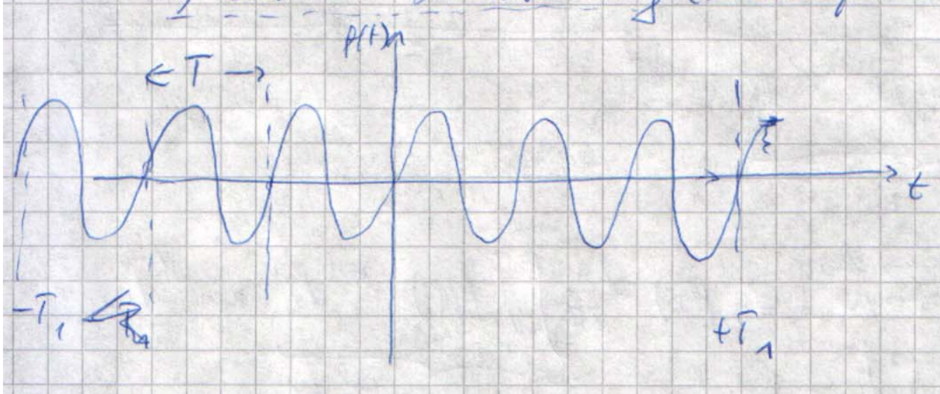
$A(\omega)$: Bild- oder Spektralfkt.
: Fouriertransformierte von $f(t)$

in reeller Schreibweise

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos(\omega\xi)\,d\xi\right]}_{a(\omega)} \cos\omega t\,d\omega + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin(\omega\xi)\,d\xi\right]}_{b(\omega)} \sin(\omega t)\,d\omega$$

b) Beispiele für Fouriertransformationen nichtperiodischer Funktionen

i) Endlicher Sinuswellenzug (Modell f. die zeitl. Kohärenz e/m Strahlung)



$$f(t) = \begin{cases} \sin(\omega_0 T) & \text{für } -T_1 \le t < +T_1, \text{ mit } T_1 = nT \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

– Je kürzer ein Wellenzug, desto mehr Frequenzen sind enthalten!